Weitere elementare Funktionen

n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$:

eindeutige Lösung von $x^n = a$

$\sqrt[n]{a}$ ← Radikant / Wurzelbasis

Wurzelexponent

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pascalsches Dreieck → Summe aus den beiden drüber

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

rekursive Berechnung

Exponentialfunktion: $f(x) = a^x, \quad a > 0$

a ↑ Basis

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$ → Addition der Argumente

Potenzen

Bernoullische Ungleichung

für $n \in \mathbb{N}_0$, $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Binomischer Lehrsatz

für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{j=0}^{m} q^j = 1 + \ldots + q^m = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$$

für $q \neq 1$ u. $m \in \mathbb{N}$

Potenzfunktionen

Potenzfunktion $\boxed{f: D \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^a}$ $a \in \mathbb{R}$ fest

für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\boxed{x^a := e^{a \cdot \ln(x)}}$

- stetig überall auf D
- differenzierbar
  - überall auf D falls $a \in \mathbb{Z}$
  - auf $\mathbb{R}_{>0}$ falls $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
- $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
- $F(x) = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} & \text{falls } a \neq -1 \\ \ln(x) & \text{falls } a = -1 \end{cases}$
- $x_0 = 0$ für $a > 0$

Exponentialfunktionen

$\boxed{f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x}$ $a \in \mathbb{R}_{>0}$ $f(1) = a$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$: $\boxed{f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y}$

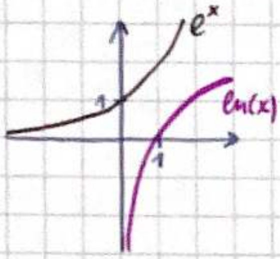
natürliche Exponentialfunktion

$\boxed{\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x}$ $\boxed{\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$

- stetig
- differenzierbar
- $\exp'(x) = \exp(x)$
- $F(x) = \exp(x) + c$
- streng monoton wachsend
- Bild $(0, \infty)$
- keine Nullstellen

Logarithmen

natürlicher Logarithmus: Umkehrfkt. der nat. Exp.-fkt.



- stetig
- differenzierbar
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C$
- streng monoton wachsend
- Bild $\mathbb{R}$
- $x_0 = 1$

Logarithmus $\boxed{\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_a(x)}$

Umkehrfkt. zu a^x

$$\boxed{a^{\log_a(x)} = x = \log_a(a^x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_e = \ln \\ \log_2 = \mathrm{lb} \\ \log_{10} = \lg \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \\ \log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \end{array}}$$

$(1 \neq a > 0 \quad x, y > 0)$

Trigonometrische Funktionen I

$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{AK}{H}}$

$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{GK}{H}}$

$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}}$

$\boxed{\cot(\alpha) = \frac{AK}{GK} = \frac{1}{\tan(\alpha)}}$

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ } gleichschenklig 45°

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

} gleichseitig 60°

cos

- $D = \mathbb{R}$
- stetig
- differenzierbar
- $f'(x) = -\sin(x)$
- Periode 2π
- Bild $[-1, 1]$
- $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- gerade
- nicht monoton

sin

- $D = \mathbb{R}$
- stetig
- differenzierbar
- $f'(x) = \cos(x)$
- Periode 2π
- Bild $[-1, 1]$
- $x_0 = k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ungerade
- nicht monoton

Trigonometrische Funktionen II

$\tan(x) = \boxed{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- stetig
- differenzierbar
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $F(x) = -\ln(\cos(x))$
- Periode π
- Bild $\mathbb{R}$
- $x_0 = k\cdot\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- ungerade
- auf jedem Teilintervall monoton wachsend

$\cot(x) = \boxed{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- stetig
- differenzierbar
- $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
- $F(x) = \ln(\sin(x))$
- Periode π
- Bild $\mathbb{R}$
- $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- ungerade
- auf jedem Teilintervall monoton fallend